ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ $1^{Η}$(Δ1)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΥΛΗ:ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

ΖΗΤΗΜΑ Α

Α1.Να αναλύσετε αναγράφοντες τις περιπτώσεις επίλυσης της $αz^2+βz+γ=0, α\neq 0$ με $α,β,γ \in R$ $z \in C$ **Μονάδες 10**

Α2. Να διατυπώσετε τον ορισμό του συνόλου των Μιγαδικών Αριθμών

Μοναδες 5

Α3 Να χαρακτηρισετε σωστό (Σ) ή λαθος(Λ) τις παρακάτω προτασεις

1. Ο συζυγής του $z+iw$ είναι ο $z-iw$
2. Αν $z^2=w^2$ τότε $z=w$ ή $z=-w$
3. Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $αz^2+βz+γ=0, α\neq 0$ και $Δ<0$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα χ΄χ
4. Ισχύει για z,w μιγαδικούς ότι $|z+w|^2=z^2+2zw+w^2$
5. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \quad .$$

Μονάδες 10

ΖΗΤΗΜΑ Β

Για τους μιγαδικούς z,w ισχυει $z^2+w^2=0$.Να δειξετε ότι:

Β1. $z=\pm w i$ **Μονάδες 5**

Β2. $z^{2014k+2}+w^{2014k+2}=0$ **Μονάδες 8**

Β3.$|z|=|w|$ **Μονάδες 5**

Β4.Αν $|w|=2$,να βρειτε το γεωμετρικό τοπο των εικονων του z **Μονάδες 7**

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2+\beta z+\gamma=0$ με β,γ ε R, η οποία εχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2. Αν $z_1=2-3i$,τότε

Γ1.Να βρείτε τη ρίζα z_2 και τους αριθμούς β και γ

Μονάδες 5

Γ2.Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2014}+z_2^{2014}$ είναι πραγματικός

Μονάδες 6

Γ3.Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2014}-z_2^{2014}$ είναι φανταστικός

Μονάδες 6

Γ4.Να αποδείξετε ότι για κάθε z μιγαδικό ισχύει $|z-z_1|+|z-z_2|\geq 6$

Μονάδες 8

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δ1.Αν $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$,διάφορες του $\vec{0}$ οι διανυσματικές ακτινες των μιγαδικων z_1,z_2 αντίστοιχα να δείξετε ότι : $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})=2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}$

Μονάδες 5

Δ2..Να δείξετε ότι αν $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$ ε I τότε το τρίγωνο $A\hat{O}B$ είναι ορθογώνιο στο Ο

Μονάδες 5

Δ3.Αν w μιγαδικός με $2w=[\operatorname{Re}(z_1)+\operatorname{Re}(z_2)]+[\operatorname{Im}(z_1)+\operatorname{Im}(z_2)]i$,να δείξετε ότι $|w|=\frac{|z_1-z_2|}{2}$

Μονάδες 8

Δ4.Αν $z_1=3+4i$ και $z_2=8-6i$,να βρείτε την εξίσωση, του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΟΒ

Μονάδες 7

ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Επιμέλεια-κατασκευή-λύση:Τζουρούνης Φώτης

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Στο πλαίσιο της αυτοαξιολόγησης των μαθητών, παραθέτω ενδεικτικές απαντήσεις των ζητημάτων.Κάθε κριτική-παρατήρηση και ο συνακόλουθος μαθησιακός διάλογος ,είναι ευπρόσδεκτος ,με στόχο την βελτίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Φ.Τ.

ΖΗΤΗΜΑ Α

Α1.Θεωρία.Σχολικό εγχειρίδιο σελίδα 92

Α2.Θεωρία(ορισμός).Σχολικό εγχειρίδιο σελίδα 86

Α3.Λ-Σ-Σ-Λ-Σ

ΖΗΤΗΜΑ Β

Β1.

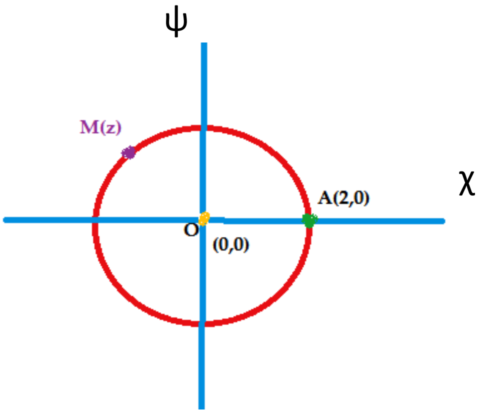
$$z^2+w^2=0 \Leftrightarrow z^2-(-w^2)=0 \Leftrightarrow z^2-(i^2w^2)=0 \Leftrightarrow z^2-(iw)^2=0 \Leftrightarrow (z-iw)(z+iw)=0 \Leftrightarrow z=iw\,ή \quad z=-iw$$

Β2.

$$z^{2014k+2}+w^{2014k+2}=(z^2)^{1007k+1}+(w^2)^{1007k+1}=(-w^2)^{1007k+1}+(w^2)^{1007k+1}\overset{1007k+1\,περιττός}{=}-(w^2)^{1007k+1}+(w^2)^{1007k+1}=0$$

Β3. $z^2+w^2=0 \Leftrightarrow z^2=-w^2 \overset{z,w\,αποκλειστικά}{\Longleftrightarrow} |z^2|=|-w^2| \Leftrightarrow |z|^2=|w|^2 \Leftrightarrow |z|=|w|$

Β4. $|w|=2 \overset{ερωτ B3}{\Longleftrightarrow} |z|=2$.Άρα οι εικόνες του z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2.Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+\psi^2=4$



ΖΗΤΗΜΑ Γ

Γ1.Ειναι γνωστό ότι οι ριζες z_1 και z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί.Άρα $z_2 = \overline{z_1} = 2+3i$ Με τη βοήθεια των τύπων Vietta έχουμε:

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{1} = -\beta \Leftrightarrow z_1 + \overline{z_1} = -\beta \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1) = -\beta \Leftrightarrow 2\cdot 2 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{1} = \gamma \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = \gamma \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = \gamma \Leftrightarrow (\sqrt{2^2+3^2})^2 = \gamma \Leftrightarrow 13 = \gamma$$

Γ2. Γνωρίζουμε ότι για οποιονδήποτε μιγαδικό w ισχύει ότι: $w = \overline{w} \Leftrightarrow w \varepsilon R$

Έχουμε λοιπόν διαδοχικά: $\overline{z_1^{2014} + z_2^{2014}} = \overline{z_1^{2014}} + \overline{z_2^{2014}} = (\overline{z_1})^{2014} + (\overline{z_2})^{2014} = z_2^{2014} + z_1^{2014}$

Άρα ο $z_1^{2014} + z_2^{2014}$ είναι πραγματικός

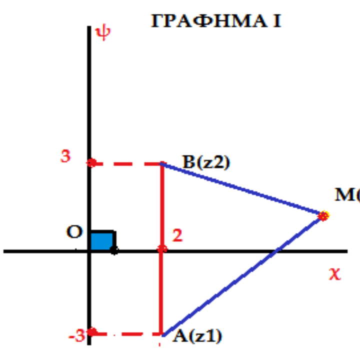
Γ**3**. Γνωρίζουμε ότι για οποιονδήποτε μιγαδικό w ισχύει ότι: $w = -\overline{w} \Leftrightarrow w \varepsilon I$

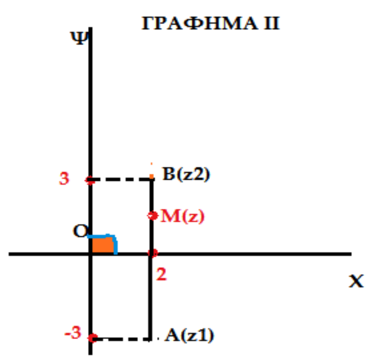
Έχουμε λοιπόν διαδοχικά:

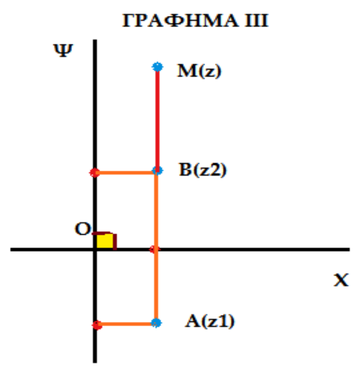
$$\overline{z_1^{2014} - z_2^{2014}} = \overline{z_1^{2014}} - \overline{z_2^{2014}} = (\overline{z_1})^{2014} - (\overline{z_2})^{2014} = z_2^{2014} - z_1^{2014} = -(z_1^{2014} - z_2^{2014})$$

Άρα ο $z_1^{2014} - z_2^{2014}$ είναι φανταστικός

Γ4.







$|z-z_1|+|z-z_2| > AB = |z_1 - z_2| (\tau\rho\iota\gamma.\alpha\nu\iota\sigma.)$ $|z-z_1|+|z-z_2| = AB = |z_1 - z_2|$ $|z-z_1|+|z-z_2| > AB = |z_1 - z_2|$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει η $|z-z_1|+|z-z_2| \geq 6 = AB$

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δ1.Αν $z_1=x+\psi i$ $x,\psi \in R$ και $z_2=\alpha+\beta i$ $\alpha,\beta \in R$ τότε $\vec{OA}=(x,\psi)$ και $\vec{OB}=(\alpha,\beta)$

Έχουμε : $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\overset{w=z_1\overline{z_2}}{=}w+\overline{w}=2\operatorname{Re}(w)=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})(1)$

Επίσης: $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=(x+\psi i)(a-\beta i)+(x-\psi i)(a+\beta i)=...=2(xa+\beta\psi)=2\vec{OA}\vec{OB}$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει άμεσα ότι : $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})=2\vec{OA}\vec{OB}$

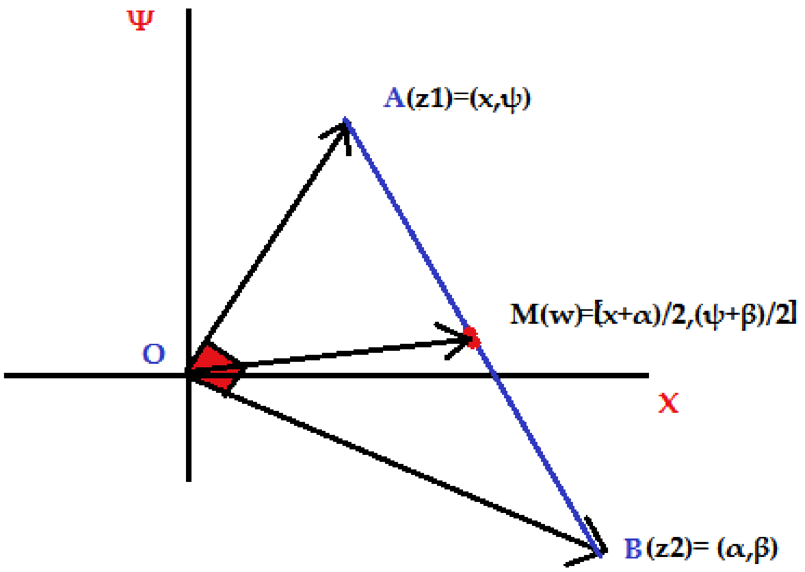
Δ2. $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$ ε I$\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})=0 \Leftrightarrow \vec{OA}\vec{OB}=0$ <=> $\vec{OA}\perp\vec{OB}$ (μη μηδενικά διανύσματα)

Επομένως το τρίγωνο είναι $A\hat{O}B$ ορθογώνιο στο O.

Δ3.$2w=[\operatorname{Re}(z_1)+\operatorname{Re}(z_2)]+[\operatorname{Im}(z_1)+\operatorname{Im}(z_2)]i \Leftrightarrow w=(\frac{x+a}{2})+(\frac{\psi+\beta}{2})i$

Δηλαδή η εικόνα του w είναι το μέσον του ευθ.τμημ. AB.Επειδή λοιπόν η διάμεσος OM ισούται με το μισό της υποτείνουσας AB έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

OM=AB/2$\Leftrightarrow |w|=\frac{|z_1-z_2|}{2}$



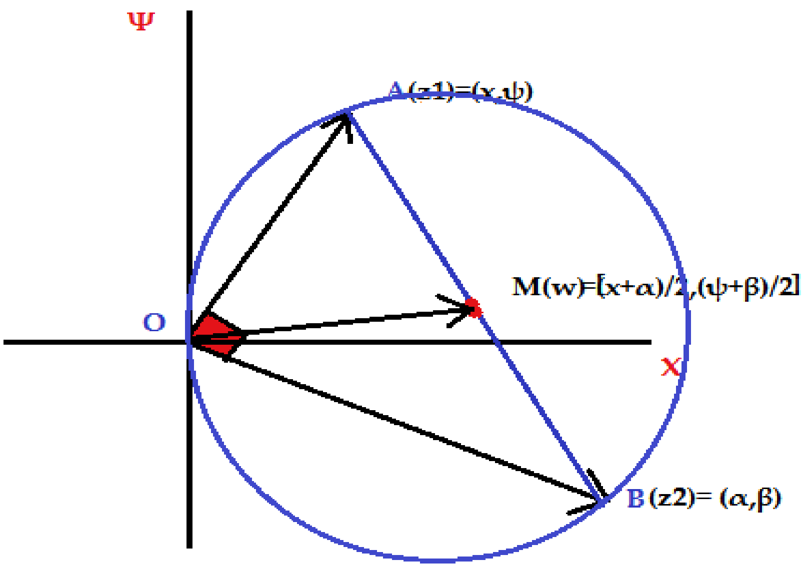
Δ4.Έχουμε z_1=3+4i και z_2=8-6i. Επομένως ισχύει

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(3,4)\cdot(8,-6)=24-24=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow \mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ ορθογώνιο στο Ο

Αρα το κέντρο του περιγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι το μέσον της υποτείνουσας, Μ(γράφημα) με Μ[(3+8)/2,(4-6)/2]=(11/2,-1) και η ακτίνα

p=AB/2=|z_1-z_2|/2= $\dfrac{\sqrt{(3-8)^2+(4+6)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{125}}{2}$.Επομένως η ζητούμενη εξλισωση του περιγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΟΒ είναι

c: $(x-\dfrac{11}{2})^2+(\psi+1)^2=(\dfrac{\sqrt{125}}{2})^2=\dfrac{125}{4}$



Για κάθε αστοχία η παράλειψη ζητώ την επιείκεια σας.

Φ.Τ.